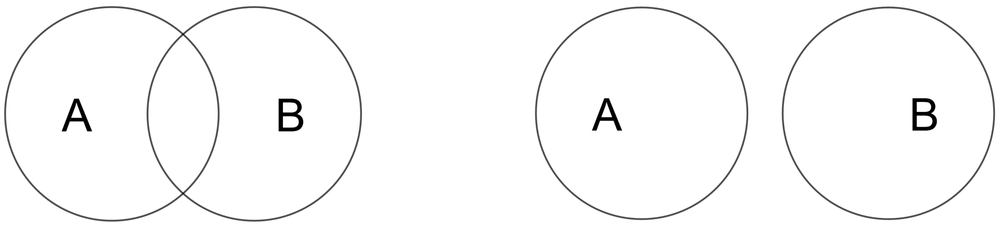
Aufgabenkatalog Algebra – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Mengen II**
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (2) *Potenzmenge auf Vereinigung und Durchschnitt*
Es seien A und B beliebige Mengen.
Überlegen Sie sich zunächst anhand eigener (möglichst simpler) Beispiele, ob die folgenden Aussagen wahr sind. Falls ja, beweisen Sie sie; falls nein, widerlegen Sie sie durch ein Gegenbeispiel.

a) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, b) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Aufgabe 2 (1) Wir bezeichnen $\underline{n} := \{1, 2, 3, \dots, n\}$.
Bestimmen Sie $\underline{1} \times \underline{2}$, $\underline{2} \times \underline{2}$, $\underline{2} \times \underline{3}$, $\underline{3} \times \underline{2}$ sowie $\mathcal{P}(\varnothing)$, $\mathcal{P}(\underline{1})$, $\mathcal{P}(\underline{2})$, $\mathcal{P}(\underline{3})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\underline{1}))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\underline{2}))$.

Aufgabe 3 (2) *Möglichkeiten für Mengenschnitte*
Für zwei Mengen A und B gibt es die Möglichkeit, sich zu schneiden oder disjunkt zu sein.



Welche unterschiedlichen Möglichkeiten für Schnitte ergeben sich bei drei Mengen? Zeichnen Sie zu jeder ein passendes Venn-Diagramm. Wobei liegt die Schwierigkeit ihre Überlegungen auf vier und mehr Mengen zu verallgemeinern?

Aufgabe 4 (3) Welche der folgenden Aussagen über beliebige Mengen A, B und C sind richtig? (Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an! Machen Sie zu jedem Teil eine Skizze.)

a) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$,

b) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Aufgabe 5 (2) Für alle $n \geq 1$ sei $A_n = \{ \frac{a}{n} \,|\, a \in \mathbb{N} \}$.
Bestimmen Sie
$$A_3, \quad \bigcap_{n \geq 1} A_n, \quad \bigcup_{n \geq 1} A_n, \quad A_n \cap A_m.$$

Aufgabe 6 (4) Es sei $A_s \subseteq U$, $s \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:
a) $U \setminus \left(\bigcup_{s \in S} A_s \right) = \bigcap_{s \in S} (U \setminus A_s)$, b) $U \setminus \left(\bigcap_{s \in S} A_s \right) = \bigcup_{s \in S} (U \setminus A_s)$

Aufgabe 7 (4) Es seien A_s, $s \in \mathbb{N}$ beliebige Mengen.

a) Es seien $B_n = \bigcup_{s=1}^{n} A_s$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $\bigcup_{s=1}^{\infty} B_s = \bigcup_{s=1}^{\infty} A_s$.

b) Es seien $B_n = \bigcap_{s=1}^{n} A_s$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $\bigcap_{s=1}^{\infty} B_s = \bigcap_{s=1}^{\infty} A_s$.

Aufgabe 8 (2) Zeigen Sie:

a) Aus $|A \setminus B| = |B \setminus A|$ folgt stets $|A| = |B|$.

b) Aus $A \subseteq B \subseteq C$ und $|A| = |C|$ folgt stets $|A| = |B|$.

Aufgabe 9 (3) *Rechenregeln bei endlichen Kardinalitäten*
Seien A und B zwei endliche Mengen.
Zeigen Sie:

(a) $|A| \neq |B|$ genau dann, wenn es keine Bijektion $A \to B$ gibt.

(b) $|A \cup B| = |A| + |B|$ genau dann, wenn $A \cap B = \emptyset$.

(c) $|A \setminus B| = |A| - |B|$ genau dann, wenn $A \subseteq B$.

(d) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, wobei $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

(e) $|A^B| = |A|^{|B|}$, wobei A^B die Menge der Abbildungen von A nach B ist.

Aufgabe 10 (3) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen abzählbar sind (d.h., konstruieren Sie jeweils eine Bijektion zu einer abzählbaren Menge, z.B. $\mathbb{N}$):

a) die Menge $\left\{ 2^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$;

b) die Menge aller ebenen Dreiecke, deren Ecken rationalen Koordinaten haben;

c) die Menge aller rationalen Punkte in der Ebene;

d) die Menge aller Polynome mit rationalen Koeffizienten.

Aufgabe 11 (3) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen überabzählbar sind (d.h., konstruieren Sie jeweils eine Bijektion zu einer überabzählbaren Menge, z.B. $\mathbb{R}$):

a) die Menge aller Punkte eines offenen Intervalls (a, b);

b) die Menge aller Folgen aus Zahlen 0 und 1;

c) die Menge aller Folgen der reellen Zahlen;

d) die Menge aller Punkte eines Quadrats;

e) die Menge aller Punkte einer Kreises;

f) die Menge aller Teilmengen einer abzählbaren Menge;

g) die Menge aller abzählbaren Teilmengen einer überabzählbaren Menge.